VARIEDADES DIFERENCIABLES
Convocatoria de enero de 2020.

1. **[2 puntos]** Sea $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ un polinomio homogéneo de grado $d \geq 1$ que admita al menos un valor positivo. Si $\Psi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ está definida por $\Psi(p) = F(p) - 1$, demostrar que $M = \Psi^{-1}(0)$ es siempre no vacío y admite una estructura de variedad diferenciable. ¿Es una subvariedad regular de $\mathbb{R}^n$?

   + compl. a lte $n \geq 2$

2. **[2 puntos]** Sea $\varphi : M \hookrightarrow N$ un difeomorfismo entre variedades y $\mathbf{X} \in \mathfrak{X}(M)$ un campo de vectores. En N se define

   pto

$$\mathbf{X}^{\varphi}(z) = d\varphi(\mathbf{X}(\varphi^{-1}(z))), \quad z \in N.$$

Justificar razonadamente que $\mathbf{X}^{\varphi} \in \mathfrak{X}(N)$, así como demostrar la relación

$$[\mathbf{X}, \mathbf{Y}]^{\varphi} = [\mathbf{X}^{\varphi}, \mathbf{Y}^{\varphi}] .$$

Duducir como actúa una forma $\omega \in \Omega^1(N)$ sobre el campo $\mathbf{X}^{\varphi}$.

3. **[2 puntos]** Sea $A_n(r)$ el volumen de la esfera n-dimensional $\mathbb{S}^n$ de radio r, y sea $B_n(r)$ el volumen de la bola de radio r. Demostrar que se satisface la relación

$$r\, A_n(r) - (n+1)\, B_{n+1}(r) = 0,$$

y deducir de ello que

$$\frac{d\, B_{n+1}}{dr} = A_n(r) .$$

4. **[4.0 puntos]** En $M = \left\{ (x^1, x^2, x^3, x^4) \in \mathbb{R}^4 \mid x^i > 0,\ i = 1, 2, 3, 4 \right\}$ se considera el campo de vectores

$$\mathbf{Z} = x^4 x^2 \frac{\partial}{\partial x^1} + \left(2\left(x^2\right)^2 - x^2 x^3 \right) \frac{\partial}{\partial x^2} - \left(x^2\right)^2 \frac{\partial}{\partial x^3} + x^1 x^2 \frac{\partial}{\partial x^4} .$$

Para cada $p \in M$ se define

$$\mathcal{D}_p(M) = \langle \mathbf{v} \in T_p M \mid \mathbf{v}.\mathbf{Z}(p) = 0 \rangle ,$$

donde $\mathbf{v}.\mathbf{Z}(p)$ designa el producto escalar usual de $\mathbb{R}^4$.

(a) Determinar el orden de $\mathcal{D}_p(M)$ y analizar si es una distribución involutiva.

(b) Calcular el anulador $\mathcal{I}(D) \subset \Omega^*(M)$ de $\mathcal{D}_p(M)$ y demostrar que define un ideal diferencial.

¿$\omega \wedge \omega = 0$.

$\omega = x y^4 dx^1 \wedge \ldots$

(c) Para cada $p \in M$, determinar una expresión implícita de la variedad integral de $\mathcal{D}_p(M)$ por p.

(d) Justificar la existencia de un sistema de coordenadas $\psi = (y^1, y^2, y^3, y^4)$ de $\mathbb{R}^4$ en el que la distribución $D|_{(U,\psi)}$ venga descrita por campos de vectores

$$Y_1 = \frac{\partial}{\partial y^1},\ Y_2 = f\left(y^1\right)\frac{\partial}{\partial y^2},\ Y_3 = \left(a_1 y^2 + a_2 y^3\right)\frac{\partial}{\partial y^2} + \left(a_3 y^2 + a_4 y^3\right)\frac{\partial}{\partial y^3},$$

donde $f\left(y^1\right) \in \mathcal{F}(U)$, $a_i \in \mathbb{R}$.

(e) ¿Forman los campos $\underline{\{Y_1, Y_2, Y_3, Z\}}$ una paralelización en M ?